

LA RESURRECTION DES CLIQUES: APPLICATION DU TREILLIS DE GALOIS (1)

par

Linton Freeman

(School of Social Sciences, University of California,
Irvine, CA 92651, USA)

Summary. The Resurrection of Cliques: Application of Galois Lattices. The mathematical definition of clique has never been entirely satisfactory when it comes to providing a procedure for assigning individuals to groups. This paper shows how the clique definition, when it is linked with Galois lattices, can be used to produce an intuitively appealing characterization of groups - one that is consistent with ethnographic descriptions. Two examples, using "classical" social network data sets, are provided. **Social network analysis, cliques, Galois lattices.**

Résumé. La définition mathématique d'une clique n'a jamais été tout à fait satisfaisante, surtout quand il s'agit de trouver un procédé qui permette de déterminer à quel groupe appartient un individu. Cet article démontre que la définition d'une clique, quand elle est placée dans le contexte d'un treillis de Galois, peut servir à décrire un groupe de sorte que la description de ce groupe soit intuitivement satisfaisante et qu'elle soit consistante avec les descriptions ethnographiques. Deux exemples sont présentés ici, qui utilisent des "cas classiques" dans le domaine des réseaux sociaux. **Analyse de réseaux sociaux, cliques, treillis de Galois.**

I. INTRODUCTION

Les sociologues ont toujours été plus ou moins d'accord sur le fait que l'étude des groupes humains est un de leurs principaux intérêts. De nos jours, comme dans le passé, ils s'intéressent tout particulièrement aux groupes contigus et de taille relativement petite; ceux que Tönnies a appelé "gemeinschaft" et que Cooley a appelé "primaires" (2).

On dit en principe que ces groupes présentent trois caractéristiques essentielles: 1) un groupe représente un ensemble d'individus qui se voient régulièrement et qui sont attachés les uns aux autres par des liens affectifs; 2) le groupe est plus ou moins bien délimité et il en chevauche à peine un autre ou pas du tout; 3) il y a des différences internes, et certains membres sont plus actifs que d'autres (3).

La plupart du temps, la notion de groupe est utilisée dans notre domaine avec peu de précision, ne dépassant pas le niveau de l'intuition. Manifestement, les ethnographes n'ont pas éprouvé de difficultés à déceler des groupes et à déterminer les membres qui en font partie. Mais aussi

jusqu'à présent, les tentatives d'élaborer un modèle formel qui permette de définir un groupe avec précision n'ont pas eu grand succès.

Ce fut au début des années quarante que l'on commença à formaliser des modèles d'analyse, applicables à l'étude des groupes, et les tentatives continuent toujours. Jusqu'à maintenant, aucun modèle n'a réussi à maîtriser le côté intuitif de la notion de groupe. On peut avoir recours aux modèles existants pour déterminer un groupe, mais les groupes que l'on a ainsi obtenus, ne correspondent tout simplement pas à ceux présentés par les ethnographes.

Le but de cet article est de proposer une nouvelle solution qui permette de résoudre le problème de la définition du groupe. Suivant le tout premier modèle qui fut présenté, la *clique*, on démontre que la structure d'un groupe est révélée, non pas au sein des cliques elles-mêmes, mais dans la façon dont les cliques se chevauchent. On voit clairement le chevauchement quand on organise celles-ci en un *treillis de Galois*. Quand un ensemble de cliques est ainsi ordonné en un treillis de Galois, celui-ci met en relief le type même de relations interpersonnelles que l'on trouve dans les rapports ethnographiques sur les groupes.

Ci-dessous, dans la deuxième partie, je présente le modèle de la clique dans ces grandes lignes. Dans la troisième partie, je reviendrai sur certains principes fondamentaux qui gouvernent le treillis de Galois. Puis, dans la quatrième partie, je démontre comment ces deux modèles formels peuvent être alliés pour faire apparaître la structure d'un groupe. Pour finir, dans les deux dernières parties, je démontre que les résultats obtenus au travers de la clique, organisée en un treillis, correspondent aux résultats des rapports ethnographiques.

II. LES CLIQUES ET LES GROUPES SOCIAUX

La définition formelle d'une clique fut introduite par Luce et Perry et par Festinger (4). Cette définition fut proposée dans le but "de déterminer la structure d'un groupe" de façon à la fois "plus rapide et plus sûre qu'avec des méthodes moins rigoureuses". Le but était donc de replacer nos idées intuitives sur l'organisation des groupes dans le contexte d'un modèle formel.

La définition de la clique offerte par Luce et Perry commence par la sélection d'un certain nombre d'agents A et d'une relation binaire "sociale" et symétrique R dans $A \times A$ qui relie les agents deux par deux. Puis une clique C est définie comme un sous-ensemble *maximal* de A contenant trois agents ou plus, parmi lesquels chaque paire est reliée par R . Dans ce contexte, le terme *maximal* veut simplement dire qu'une clique ne peut jamais être un sous-ensemble d'une autre clique.

Dès sa conception, cette définition formelle de la clique séduit les adeptes des sciences sociales. Elle peut être appliquée à la recherche sur les rapports ou les liens affectifs entre deux individus, et elle a l'avantage

d'indiquer les sous-groupes d'individus qui se fréquentent particulièrement souvent.

Bien que cette définition de la clique soit très séduisante, il est très tôt apparu qu'elle ne convient pas pour décrire la structure de groupe telle qu'elle est conçue par les sociologues. A quatre niveaux différents, les cliques observées à base de recherche empirique sur les relations humaines, ne réussissent pas à mettre en valeur la structure intuitive d'un groupe:

- 1) les cliques sont trop petites pour qu'on puisse se fier à l'intuition;
- 2) il y a en général trop de cliques pour qu'on puisse se fier à l'intuition;
- 3) les cliques se chevauchent au point de défier l'intuition;
- 4) puisque la définition de la clique exige que chaque membre soit en rapport direct avec chaque autre membre, l'apparence générale de la clique obscurcit l'importante "structure interne" que les groupes sociaux sont censés posséder.

A titre d'exemple, penchons nous sur le cas de la recherche faite par Roethlisberger et Dixon parmi certains employés d'une usine de la compagnie Western Electric (5). Les employés sélectionnés étaient au nombre de quatorze et travaillaient ensemble. Deux d'entre eux travaillaient en tant qu'inspecteurs (I1 et I3), trois autres en tant que soudeurs (S1, S2, S4), tandis que les neuf restants étaient électriciens (W1 à W9).

L'un des observateurs prit des notes sur les différents types de relations sociales liant ces individus. La recherche indique que des paires se formèrent autour de divers jeux et à l'occasion de courses de chevaux. La matrice binaire et symétrique, représentée dans le tableau 1, est basée sur cette recherche. Dans cette matrice, les valeurs 1 correspondent aux paires de sujets occupés à jouer au moment de l'observation. Les autres reçurent une valeur de 0.

Ecrivant du point de vue ethnographique, Roethlisberger et Dixon estimèrent que ces individus représentaient deux groupes bien distincts. Le groupe A comprend W1, W2, W3, W4, S1, et I1. W3 est considéré comme étant à la tête du groupe (p: 465), et W2 comme étant un membre marginal. Le groupe B comprend W6, W7, W8, W9, et S4. Aux dires de Roethlisberger et Dixon, W6 n'est pas "vraiment accepté par le reste du groupe" (p: 509) et S4 est "considéré comme étant socialement inférieur" (p: 483). Les trois restants (W5, S2, et I3), selon Roethlisberger et Dixon, n'appartiennent ni au groupe A ni au groupe B (p: 510).

Les cliques contenues dans les colonnes du tableau 1 sont mises en relief dans le tableau 2. Ces cliques présentent tous les problèmes que l'on rencontre dans ce genre d'analyse, problèmes dont nous avons brièvement parlé ci-dessus:

- 1) les cliques sont toutes plus petites que les groupes - la clique la plus large, par exemple, ne contient que cinq personnes, tandis que le groupe A de Roethlisberger et Dixon en contient six;

2) il y a cinq cliques mais seulement deux groupes - il n'y a donc pas moyen de déterminer quel assemblage de cliques reflète le mieux la structure du groupe;

3) la plupart des cliques se chevauchent mais ce n'est pas le cas des groupes (C1 et C3, par exemple, ont quatre membres sur cinq en commun);

4) si l'on choisit deux de ces cliques (disons C2 et C5) comme représentant approximativement la structure des deux groupes, on est incapable de faire la distinction entre les membres qui se trouvent à la tête du groupe (comme W3) et ceux qui sont marginaux (comme W2).

Ainsi, pour une raison ou pour une autre, la plupart des chercheurs ont conclu que les cliques ne sont pas un moyen satisfaisant de décrire la structure d'un groupe (6). Cependant, le concept de la clique a continué de susciter l'intérêt des chercheurs. Au cours des années, sa simplicité mathématique et son pouvoir de suggestion ont continué à attirer les chercheurs, mais le fait que les résultats n'aient pas été aussi satisfaisants n'a servi qu'à les décourager.

Ainsi que je l'ai suggéré ci-dessus, une des solutions possibles est de réorganiser les cliques en un treillis de Galois. Dans la partie suivante, je reviens donc sur certains principes du treillis de Galois.

III. LE TREILLIS DE GALOIS

Soit un ensemble fini $X = \{x, y, z, \dots\}$ et une relation binaire \leq dans $X \times X$. La relation \leq est réflexive, non-symétrique et transitive, et l'ensemble X est donc partiellement ordonné.

Soit un couple d'éléments x et y de l'ensemble X . Un *minorant commun* à x et à y est un élément m tel que $m \leq x$ et $m \leq y$. Un minorant commun m est le plus grand minorant commun, ou *infimum* quand il n'y a pas d'autre élément b tel que $b \leq x$ et $b \leq y$ et $m \leq b$. De la même façon, un *majorant commun* j est un élément tel que $x \leq j$, $y \leq j$. S'il n'y a pas d'élément b tel que $x \leq b$, $y \leq b$, et $b \leq j$, j est le plus petit majorant commun, ou *supremum*.

Tout ensemble partiellement ordonné dans lequel tout couple d'éléments a un infimum et un supremum est un *treillis*. Par exemple, l'ensemble $P(X)$, de tous les sous-ensembles d'un ensemble X donné est un treillis pour l'inclusion: pour tout $S, S' \subseteq X$ on a bien:

$$S \cap S' \subseteq S, S' \text{ et } S, S' \subseteq S \cup S',$$

et $S \cap S'$, $S \cup S'$ les sont minorants et majorants communs de S et S' .

Considérons un triplet (A, C, M) dans lequel A et C sont des ensembles finis non vides, et $M \subseteq A \times C$ est une relation binaire. A partir de la relation M , on définit une application $\uparrow: B \rightarrow B\uparrow$ de $P(A)$ dans $P(C)$ par:

$$B\uparrow = \{c \in C \mid (a, c) \in M \text{ pour tout } a \in B\},$$

L'application $\downarrow : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^\uparrow$ de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ est définie de façon similaire:

$$\mathcal{D}^\downarrow = \{a \in \mathcal{A} \mid (a, c) \in \mathcal{M} \text{ pour tout } c \in \mathcal{D}\}.$$

Soit $\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \{A_1^\uparrow, A_2^\uparrow, \dots\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{C})$ l'ensemble des images de \uparrow , et soit $\mathcal{S}(\mathcal{C}) = \{C_1^\downarrow, C_2^\downarrow, \dots\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})$ l'ensemble des images de \downarrow . On montre facilement que les restrictions de \uparrow et \downarrow à $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, respectivement, sont les inverses l'une de l'autre. En fait, les indices peuvent être choisis de telle manière que $A_i^\uparrow = C_i^\downarrow$ et $C_i^\downarrow = A_i^\uparrow$, pour tout indice i .

Ces concepts ont été analysés par Birkhoff (7). Les ensembles éléments de $\mathcal{S}(\mathcal{C})$, ordonnés par inclusion, forment un treillis. On a évidemment un résultat similaire pour les éléments de $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. De plus, ces deux treillis sont dans la relation duale:

$$(C_i^\downarrow \subseteq C_j^\downarrow \Leftrightarrow A_i^\uparrow \supseteq A_j^\uparrow);$$

et peuvent être représentés conjointement par un seul treillis sur $\mathcal{S}(\mathcal{C}) \times \mathcal{S}(\mathcal{A})$ défini par l'équivalence:

$$(C_i^\downarrow, A_i^\uparrow) \leq (C_j^\downarrow, A_j^\uparrow) \Leftrightarrow C_i^\downarrow \subseteq C_j^\downarrow \text{ \& \ } A_i^\uparrow \supseteq A_j^\uparrow.$$

En d'autres termes, un élément $(C_i^\downarrow, A_i^\uparrow)$ de ce treillis est dominé par un autre élément $(C_j^\downarrow, A_j^\uparrow)$ lorsque C_i^\downarrow est inclus dans C_j^\downarrow , ou lorsque A_i^\uparrow inclut A_j^\uparrow , et ces deux conditions sont équivalentes. Ce treillis est appelé *treillis de Galois* (8).

On peut donner une image d'un treillis de Galois, en ayant recours à des lignes et des annotations. Dans un diagramme de ce genre, chaque élément est représenté par un point, et les points sont reliés par des lignes ascendantes et descendantes indiquant leur ordonnement. Chaque point est accompagné de deux annotations, l'une marquant le sous-ensemble des éléments tirés de \mathcal{A} , et l'autre marquant le sous-ensemble des éléments tirés de \mathcal{C} .

Tels sont donc les principes élémentaires du treillis de Galois. Il existe des analyses plus détaillées et d'autres encore sur des sujets d'un niveau plus poussé que notre cas. Nous allons nous concentrer sur l'application de ces idées à l'analyse des cliques (9).

IV. LE TREILLIS GALOIS DE CLIQUES

L'application d'un treillis Galois à un groupe de cliques se fait sans complications. La structure qui est propre à la clique convient parfaitement au treillis de Galois. Elle consiste en un triple $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{M})$, \mathcal{A} étant un ensemble d'agents, \mathcal{C} un ensemble de cliques et \mathcal{M} la relation binaire en $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$. Dans ce cas ci, $(a, c) \in \mathcal{M}$ se lit "l'agent a appartient à la clique c ".

A titre d'exemple, reportons notre attention sur les cliques observées chez Roethlisberger et Dixon. Le figure 1 ci-dessous représente un treillis de Galois qui montre la façon dont les agents et les cliques sont organisés.

Prenons note du fait que puisque I3 et S2 ne participaient pas aux jeux de société comme les autres, seuls 12 individus sont inclus, et ceux-ci sont organisés en cinq cliques de joueurs.

Tous les éléments des sous-ensembles $S(A)$ et $S(C)$, ainsi groupés, apparaissent dans le figure. Le point le plus élevé représente les deux sous-ensembles qui renferment les douze individus mais ne contiennent aucune des cliques. Le point le plus bas représente ceux contenant les cinq cliques mais pas les individus. Les points entre les deux sont annotés de façon à indiquer quels sous ensembles de cliques et quels sous-ensembles d'individus ils représentent.

Dans la pratique, il est plus facile de comprendre un treillis quand celui-ci n'est pas trop surchargé d'annotations. A côté de chaque point, seuls sont indiqués les noms des agents pour lesquels le point représente le plus petit élément contenant ces agents. De la même façon, à côté de chaque point, est indiqué le nom de toute clique pour laquelle celui-ci représente l'élément le plus grand contenant ces cliques. Les points qui ne représentent ni le plus petit élément contenant un agent quelconque, ni l'élément le plus grand contenant une clique quelconque, ne sont pas annotés. Le figure 2 est basé sur le figure 1 des cliques en treillis, mais cette fois ci avec un nombre limité d'annotations.

Le figure 2 permet de visualiser la façon dont les agents se répartissent en divers groupes du fait de leur appartenance à une certaine clique. Mais on ne peut pas compter sur ce procédé pour définir un groupe. Ce problème est traité dans la partie suivante.

V. DES GROUPES ET LE CHEVAUCHEMENT DES CLIQUES

Se fiant à l'intuition, on considère généralement que les groupes ne se chevauchent pas. Pour cette raison, on est tout naturellement tenté de chercher à les déterminer en fonction de la façon dont les cliques se chevauchent. Les individus qui font partie d'une clique qui en chevauche une autre forment aussi un groupe à part avec les individus de l'autre clique, et les individus qui font partie d'une clique disjointe forment un groupe bien distinct. Ainsi, on définit un groupe en déterminant ce qui le sépare des autres groupes.

Soit $C = \{c_i, c_j, \dots\}$, un ensemble de cliques. Le chevauchement \circ est une relation binaire en $C \times C$ tel que:

$$c_i \cap c_j \neq \emptyset \Leftrightarrow (c_i, c_j) \in \circ.$$

Ainsi, si deux cliques ont au moins un membre en commun, elles se chevauchent.

Ainsi défini, le chevauchement est réflexif et symétrique, mais pas nécessairement transitif. En effet, il est possible qu'une clique c_i en chevauche une autre, c_k , et que c_k en chevauche une troisième, c_j , tandis que c_i et c_j ne se chevauchent pas. Pourtant, notre intuition nous dit que

les membres de c_i et c_j sont toujours reliés en vertu des éléments de c_k et qu'ils appartiennent au même groupe. Dans le cadre de cette analyse, il a donc été décidé que le chevauchement serait transitif. Ainsi, dans le cas de n'importe quelle clique c_k , si $(c_i, c_k) \in O$ et $(c_k, c_j) \in O$, alors $(c_i, c_j) \in O$. Défini de cette façon, le chevauchement est une relation d'équivalence.

Ainsi, la relation O divise l'ensemble des cliques C en sous-ensembles C' , C'' , ... qui sont des classes d'équivalence. Dans chaque sous-ensemble classe d'équivalence, chaque clique chevauche toutes les autres, et deux cliques n'appartenant pas au même sous-ensemble ne se chevauchent jamais.

Cela nous permet de définir un groupe. Si A' est l'ensemble de tous les membres d'un groupe de cliques, C' , qui se chevauchent, alors:

$$\Gamma(C') = A'.$$

De ce fait, un groupe est tout simplement fait de l'union d'individus qui font partie d'un ensemble maximal quelconque de cliques qui se chevauchent. Puisque les cliques ont été divisées en sous-ensembles classes d'équivalence qui ne se chevauchent pas, en fonction des membres qui font partie de chacune, les membres de ces sous-ensembles sont aussi divisés.

On peut facilement voir les groupes dans le tableau à lignes qui représente le treillis de Galois. Puisque, par définition, une clique ne peut pas en contenir une autre, les cliques doivent toutes se loger au deuxième niveau du treillis dans un tableau à lignes; elles doivent venir directement du point plus haut, ou superlatif simple dans la suite. Deux cliques qui se chevauchent sont reliées par deux lignes qui, à un certain point marqué de leur descente, convergent plus bas dans le treillis. Et deux cliques qui ne chevauchent pas seront reliées seulement dans le point plus bas qui n'est pas annoté. En effet, si le point plus bas était annoté, un ou plusieurs individus devraient faire partie de toutes les cliques dans C et C , par conséquent, devrait constituer un seul groupe.

Dans le figure 2, par exemple, les cliques 1 et 2 se partagent les éléments W_2, W_1, W_3 , et W_4 . Les cliques 1 et 3 se partagent W_1, W_2 , et W_3 , et les cliques 2 et 3 se partagent S_1, W_1, W_3 , et W_4 . De la même manière, les cliques 4 et 5 ont les éléments W_7, W_8 et W_9 en commun. Mais les cliques 1 et 5, 2 et 5, 3 et 5, 1 et 4, 2 et 4, et 3 et 4 n'ont pas d'éléments en commun. Ce sont des cliques bien distinctes qui ne se chevauchent pas. Ainsi, dans le figure 2, les cliques 1, 2, et 3, se chevauchent et forment un seul groupe contenant $W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, S_1$, et I_1 . De la même manière, les cliques 4 et 5 se chevauchent et forment un autre groupe qui contient W_6, W_7, W_8, W_9 , et S_4 .

Le premier de ces groupes correspond presque parfaitement au groupe de Roethlisberger et Dixon. Dans le premier rapport qu'ils firent paraître, Roethlisberger et Dixon furent précis sur le fait que W_1, W_2, W_3, W_4, S_1 , et I_1 appartiennent au groupe A. Cependant, W_5 est, à leur avis, un isolé. Nos résultats indiquent qu'ils auraient dû inclure W_5 au groupe A.

Le deuxième groupe obtenu ici correspond parfaitement au groupe B de Roethlisberger et Dixon. Il est donc clair que, dans l'ensemble, la structure d'un groupe, telle qu'on peut la discerner de par la façon dont les cliques se chevauchent, correspond parfaitement bien à la structure décrite dans le rapport de Roethlisberger et Dixon.

Dans le cadre de notre figure du treillis, nous pouvons aussi mettre en relief la structure interne des groupes. A priori, on considère que chaque individu a sa place dans un groupe, soit en son sein, soit dans la périphérie, soit quelque part entre les deux. Dans la théorie des treillis, il est de coutume de définir la position d'un élément en fonction de sa hauteur au dessus du point plus bas (10).

Prenons le cas d'un treillis qui a été divisé en groupes. Chaque groupe démarque un sous-treillis dont fait partie le point plus haut, l'ensemble des cliques qui se chevauchent et qui définissent le groupe, tous les éléments qui descendent de ces cliques et le point plus bas.

Sauf au niveau des points les plus haut et des points les plus bas, chaque élément dans le sous-treillis d'un groupe est relié à un ou plusieurs autres éléments (logés au dessus de celui-ci) par des lignes ascendantes, ainsi qu'à un ou plusieurs éléments (logés en dessous de celui-ci) par des lignes descendantes. Bien sûr, le point plus haut n'est relié aux autres éléments que par des lignes descendantes, et le point plus bas n'est relié aux autres éléments que par des lignes ascendantes.

Ainsi une *chaîne* est une série de lignes toutes ascendantes ou toutes descendantes, qui vont d'un élément à un autre. La *longueur* de cette chaîne correspond au nombre de lignes que celle-ci contient.

Si, à présent, nous portons notre attention sur toutes les chaînes ascendantes qui partent du point plus bas en direction d'un élément quelconque dans le treillis, nous voyons que la hauteur de cet élément dépend en partie de la longueur de ces chaînes. Dans le cas présent, tenons-nous en au cas où toutes les chaînes partant du point plus bas en direction d'un même élément sont toutes de la même longueur (ceci s'appliquant à tout élément). Dans ce cas là, la hauteur de cet élément correspond tout simplement à la longueur de n'importe laquelle de ces chaînes.

Il est possible d'indiquer chaque individu à côté de plusieurs éléments dans le treillis, mais dans le cadre de cette analyse, de même qu'avec la question du nombre réduit d'annotations, il n'est vraiment nécessaire d'indiquer chaque individu qu'à côté de l'élément le plus en bas du treillis, parmi ceux auxquels l'individu est attaché. Dans ce cas-là, la hauteur à laquelle se trouve cet individu dépend de la hauteur de n'importe laquelle de ces chaînes.

L'attrait de cette définition de "hauteur" est que l'on peut s'en servir pour avoir une idée de la position d'un individu au sein d'un groupe. Un individu, directement relié au point le plus bas, qui apparaît d'abord en bas d'un sous-treillis est quelqu'un de très actif dans le groupe. Il est possible que cet individu soit actif dans plusieurs cliques, mais sa participation

dans n'importe laquelle de ces cliques ne dépend jamais de la participation d'un autre individu, quelqu'il soit. Par exemple, dans le figure 2, W1, W3 et W4 sont tous au niveau 1 par rapport au point le plus bas. Ils appartiennent à trois cliques auxquelles ils sont reliés par des chaînes ascendantes. Cependant, S1 et W2 apparaissent au dessus de W1, W3, et W4 au niveau 2. Par conséquent, S1 et W2 ne font partie de ces cliques que lorsque W1, W3 et W4 sont aussi membres.

On ne peut donc minimiser le fait que W1, W3 et W4 sont *au centre* du groupe, tandis que S1 et W2 sont *marginiaux*. Bien sûr, W5 et I1 sont encore plus marginaux à cet effet. W5 n'est inclus que si W1, W3 et W4 ainsi que S1 sont tous inclus, et I1 n'est inclus que si W1, W3, W4 et W2 sont inclus. Ainsi, parmi les membres du premier groupe, W1, W3 et W4 sont au niveau 1 et au centre; S1 et W2 sont au niveau 2 et plutôt marginaux, tandis que W5 et I1 ne sont qu'au niveau 3 et très marginaux. Si on analyse le deuxième groupe de la même manière, on voit que W7, W8 et W9 sont au niveau 1 et appartiennent donc au centre, tandis que W6 et S4 sont au niveau 2 et sont donc relativement marginaux.

Ces résultats sont en accord avec l'analyse de Roethlisberger et Dixon. Ces derniers avaient indiqué W3 comme étant à la tête du groupe A (p: 464). Et ils avaient suggéré que W2, bien qu'affilié au groupe A, n'en n'était pas un habitué (p: 510). Dans le même ordre d'idée, ils avaient décrit W6 comme étant très actif dans le groupe B, mais comme n'étant pas entièrement accepté par les membres de ce groupe. L'analyse en cours fournit plus de renseignements mais ne va pas à l'encontre du rapport ethnographique.

Dans le cas présent, le fait d'observer la façon dont les cliques se chevauchent nous a permis de discerner des groupes qui manifestent des différences internes. Cependant, il y a des cas où la limite entre deux groupes n'est pas très précise. Dans la partie suivante, un autre exemple nous permet de voir comment un treillis de cliques peut servir à déceler un groupe, même quand les limites de ce dernier ne sont pas bien claires.

VI. COMMENT DEFINIR UN GROUPE QUAND ON EST EN PRESENCE DE LIENS

Bien que notre intuition nous suggère que les groupes ne se chevauchent que très peu, il est généralement reconnu que, dans certains cas, ils peuvent être reliés. C'est Granovetter qui, plus que quiconque, a maintenu qu'il existe des liens qui transcendent les limites séparant les groupes et relient des membres appartenant à différents groupes (11). Dans cette partie, j'introduis un procédé qui permet de définir un groupe avec précision, même en la présence de liens entre groupes. Dans ce but, j'introduis aussi la notion de *cliques intermédiaires*.

Comme nous l'avons vu auparavant, un groupe est un ensemble d'individus, liés les uns aux autres en vertu de leur participation dans un ensemble de cliques qui se chevauchent. De plus, chaque clique représente un ensemble maximal d'individus liés les uns aux autres pour une raison ou pour une autre. Si un groupe est limité, les membres de toutes les

cliques qui forment le groupe, doivent aussi, sans exceptions, être membres de ce groupe. Mais s'il existe des liens entre plusieurs groupes, il doit y avoir au moins une clique qui soit faite d'individus qui appartiennent à différents groupes. Ainsi, l'action de définir un lien et celle de définir une clique intermédiaire reviennent au même.

Il est nécessaire de pouvoir faire la différence entre les cliques qui relient les membres d'un groupe entre eux et les cliques qui servent de liens entre plusieurs groupes. Pour faire cette distinction, il nous est à nouveau nécessaire d'analyser la structure interne d'un groupe.

Prenons le cas d'un sous-treillis qui consiste en une clique c_i et en les éléments qui viennent de c_i . Admettons que le treillis N5 qui apparaît dans le figure 3 consiste en un sous-treillis de cette nature, basé sur une clique. Si on interprète ce sous-treillis en se basant sur la définition intuitive du groupe, les résultats sont ambigus. Les points z et y sont tous les deux près de la clique au sommet (au niveau 1) et de ce fait sont considérés comme étant relativement marginaux. Par contre, les points x et y sont tous les deux directement reliés au point le plus bas (au niveau 1) et sont donc centraux. Mais le point y est à la fois marginal et au centre; il occupe donc une position ambiguë.

Notre intuition nous suggère que si ce sous-treillis représentait une clique qui relie les membres d'un seul groupe, il ne devrait pas y avoir d'ambiguïté quant à la position de chaque individu dans la structure: qu'il soit au centre, dans la périphérie, ou quelque part entre les deux. Mais si une personne servait de lien entre deux groupes, il est improbable qu'il ou elle serait situé(e) exactement au même niveau dans chacun de ces deux groupes. En effet, si ce sous-treillis représentait une clique reliant les membres de plusieurs groupes, on s'attendrait précisément à trouver le type d'ambiguïté présent dans le figure 3.

Soit $z = \{z_j\}$, l'ensemble des chaînes reliant le point le plus bas à la clique d'un sous-treillis. A chaque chaîne z_j correspond une longueur l_j . Dans le figure 3, par exemple, il y a deux chaînes de cette sorte. Celle à droite a une longueur égale à 2, tandis que celle à gauche a une longueur égale à 3. Le type d'ambiguïté décrit ci-dessus est la conséquence directe du fait que la longueur des chaînes varie. En effet, dans n'importe quel cas où les chaînes reliant le point le plus bas à une clique ne sont pas de la même longueur, il y a un individu dans cette clique qui occupe une position ambiguë.

Une clique est donc *intermédiaire* quand elle sert de base à un sous-treillis non-modulaire (12). Dans un treillis non-modulaire:

$$\exists(z_i, z_j) \mid l_i \neq l_j.$$

La longueur des chaînes qui relient la clique au point le plus bas est variable.

Quand, dans un treillis, on tombe sur des cliques intermédiaires de ce genre, on peut les éliminer. Puisque ces cliques sont Intermédiaires, leur élimination a pour conséquence de diviser le groupe d'origine en deux

groupes distincts ou plus, alors qu'auparavant, ils étaient reliés par une clique intermédiaire. Chaque nouveau groupe est modulaire.

Dans le but de mettre ce principe en application, prenons le cas de Sampson et de la recherche qu'il fit dans un monastère (13). Sampson fit sa recherche à une époque où il y avait des disputes acerbes sur la question de l'oecuménisme de Vatican II. Ces disputes s'étaient répercutées dans le monastère, parmi les novices.

Sampson se pencha sur le cas de dix-huit novices en particulier. Il considéra sept d'entre eux (4, 5, 6, 8, 9, 10 et 11), arrivés plus tôt que les autres, comme formant un groupe à part, qu'il appela "l'Opposition Loyale". Il identifia 4, 6, 9 et 11 comme étant à la tête du groupe. Il divisa les novices restants, ceux arrivés plus tard, en deux groupes. Sept d'entre eux (1, 2, 7, 12, 14, 15, 16) il nomma "les Jeunes Turcs", estimant que 1, 2, et peut être 12, étaient à leur tête (14). Et il baptisa les trois derniers "les Rejetés."

Ensuite, Sampson décrivit les liens entre ces groupes. La place du novice 13 n'était pas claire. C'était un "Indécis" qui allait d'un groupe à l'autre et reliait l'Opposition Loyale aux Rejetés. Par ailleurs, les Rejetés étaient apparemment reliés aux Jeunes Turcs. Suivant Sampson, il y avait une certaine affinité entre les membres de ces deux groupes.

Sampson fit son enquête de façon systématique, demandant à chaque novice de nommer trois autres novices en particulier avec lesquels ils avaient différents types de rapports. Plus précisément, il leur demanda de ranger ces trois personnes par ordre de préférence en fonction de la nature de leur relation avec celle-ci: soit le novice aimait bien la personne, il avait de l'estime pour celle-ci, cette personne avait de l'influence sur lui, il en faisait l'éloge; ou bien, il n'aimait pas la personne, il ne la portait pas dans son coeur, elle n'avait pas une bonne influence sur lui et donc le novice condamnait cette personne. Le caractère vague et subjectif de ces questions, ainsi que la possibilité offerte aux novices de ne pouvoir choisir que trois personnes, sont déplorables. Cependant, les renseignements qu'il fournit sur "qui aime bien qui" sont sans ambiguïté. Je me sers donc de ceux-ci dans le cadre de cette analyse et ils sont illustrés dans le tableau 3. Mais dans notre cas, l'ordre de préférence n'a pas été pris en compte. Une relation essentiellement amicale a reçu une valeur de 1. Dans tout autre cas, la valeur est 0.

La matrice que nous obtenons ainsi est très éparse, mais ce qui est encore plus important dans le contexte présent, c'est qu'elle n'est pas symétrique. On l'a rendu symétrique en prenant la fermeture symétrique de la relation correspondante. Ainsi, à chaque fois qu'un novice dit qu'il en aimait bien un autre, les deux furent mis ensemble.

On a pu identifier dix-sept cliques. Celles-ci forment un treillis de Galois contenant quarante cinq éléments. Ce treillis est représenté dans le figure 4.

Le treillis du figure 4 indique que tous les novices sont rassemblés en un seul groupe. Ceci concorde avec le rapport de Sampson en fonction duquel

il y avait une certaine affinité entre le groupe des "Rejetés" et celui des "Jeunes Turcs", tandis que le novice 13 reliait l'Opposition Loyale aux Rejetés. Le problème est donc de découvrir dans ce treillis les trois groupes décrits par Sampson.

Le treillis du figure 4 contient trois cliques Intermédiaires telles qu'on les a définies auparavant. Elles sont représentées par six lignes qui indiquent les liens dans le treillis. Dans le figure 5, on peut observer la nouvelle structure avec les cliques Intermédiaires qui sont marquées par des cercles vides et les liens qui sont marqués par des lignes discontinues.

Aux dires de Sampson, les novices 1, 2, 7, 12, 14, 15 et 16 représentent les Jeunes Turcs, le groupe sur la gauche dans le figure. Le groupe d'à côté, les novices 3, 17 et 18 forment le groupe des Rejetés. Pour finir, les novices 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, sur la droite, représentent l'Opposition Loyale. Le 13, l'indécis, qui passait continuellement de l'Opposition Loyale au groupe des Rejetés, sert seulement de lien dans ce treillis.

Donc, dans l'ensemble, les résultats de notre analyse de la clique nous donnent *exactement* la même structure que celle décrite par Sampson.

Pour le ceure et la périphérie, les résultats sont presque les mêmes. Aux dires de Sampson, les membres à la tête des Jeunes Turcs étaient le 1, le 2, et le 12. Notre analyse indique que ce sont le 2, le 12, et le 15. De plus, pour Sampson, les membres à la tête de l'Opposition Loyale étaient le 4, 6, 8 et 11. Dans notre cas, ce sont le 4, 5, 6, 8 et 9. Il y a donc de petites différences, mais dans l'ensemble, nous sommes vraiment en accord.

Ainsi, nous voyons bien qu'il est possible de découvrir des groupes même quand on est en présence de liens entre groupes. Ainsi, il est clair qu'un treillis de Galois nous permet d'utiliser des cliques pour définir un groupe. Le groupe ainsi défini correspond à nos idées traditionnelles et intuitives sur la structure des groupes. De plus, celui-ci correspond quasiment au groupe décrit par les ethnographes. Il semble donc que le modèle formel de la clique donne exactement le résultat désiré quand il est placé dans le contexte d'un treillis de Galois.

VII. RESUME ET CONCLUSIONS

Cette analyse a adressé un problème classique, la question de pouvoir dire avec précision à quelles conditions on peut dire qu'un groupe d'individus constitue un groupe social. Depuis toujours, les sociologues ont eu une conception intuitive des groupes. Le fait qu'ils se soient fiés à leur intuition pour désigner un groupe et pour y attribuer des individus ne leur a pas posé de problèmes. Mais aussi jusqu'à présent, les efforts qui avaient été fait dans le but de définir précisément à quelles conditions un ensemble d'individus forme ou ne forme pas un groupe, n'avaient pas abouti. La notion de "groupe" dans ce domaine était resté un concept très vague.

Dans cette étude, j'ai pris un concept formel, la clique, et je l'ai associé à un autre, le treillis de Galois. L'action de lier ces deux modèles m'a suggéré

un moyen de déterminer un groupe social en me basant sur la façon dont les cliques se chevauchent. Cette définition fut conçue à partir de nos idées traditionnelles et intuitives sur les groupes, et il s'avère qu'elle permet de déceler des groupes qui correspondent aux descriptions ethnographiques. Mais le résultat le plus remarquable de cette étude est peut être le fait que les analyses ont été uniquement basées sur les relations binaires les plus minimes indiquant les liens entre individus.

NOTES

- (1) L'auteur de cet article tient à remercier toutes les personnes et les institutions qui l'ont aidé dans sa préparation. Plus spécialement, la Maison de Sciences de l'Homme qui m'a invité à la Maison Suger en Paris pendant l'été 1991, et ainsi que Vincent Duquenne, Rudolf Wille et Douglas White qui m'ont aidé à développer mes idées pendant mon séjour parisien. Des remerciements aussi à Claire Joly, Jean-Claude Falmagne, Vincent Duquenne et William Schoenfeld qui m'ont aidé pour la traduction.
- (2) F. Tönnies, *Gemeinschaft und Gesellschaft*, 1887/1940. C. H. Cooley, *Social Organization*, New York, Charles Scribner, 1909.
- (3) L. C. Freeman, "The sociological concept of 'group': an empirical test of two models", *American Journal of Sociology*, n°98, 1992, 55-79.
- (4) R. D. Luce, et A. Perry, "A method of matrix analysis of group structure", *Psychometrika*, n°14, 1949, 95-116. L. Festinger, "The analysis of sociograms using matrix algebra", *Human Relations*, n°10, 1949, 153-158.
- (5) F. J. Roethlisberger, et W. J. Dixon, *Management and the Worker*, Cambridge, MA, Harvard University Press, 1939.
- (6) R. D. Luce, "Connectivity and generalized cliques in sociometric group structure", *Psychometrika*, n°15, 1949, 169-190. R. D. Alba, "A graph theoretic definition of a sociometric clique", *Journal of Mathematical Sociology*, n°3, 1973, 113-126. E. R. Peay, "A note concerning the connectivity of social networks", *Journal of Mathematical Sociology*, n°4, 1976, 319-321. R. D. Alba et G. Moore, "Elite social circles". *Sociological Methods and Research*, n°7, 1978, 167-188. S. B. Seidman, et B. L. Foster, "A graph-theoretic generalization of the clique concept", *Journal of Mathematical Sociology*, n°6, 1978, 139-154. R. J. Mokken, "Cliques, clubs and clans", *Quantity and Quality*, n°13, 1979, 161-173. P. Doreian, "On the deliniation of small group structures", in H. C. Hudson, *Classifying Social Data*, San Francisco, Jossey-Bass, 1982. J. R. King, et V. Nakornchai, "Machine-component group formation in group technology: Review and extension", *International Journal of Production Research*, n°20, 1982, 117-133. S. B. Seidman, "Internal cohesion of LS sets in graphs", *Social Networks*, n°5, 1983, 97-107. X. Yan, "On fuzzy cliques in fuzzy networks", *Journal of Mathematical Sociology*, n°13, 1989, 359-389. P. Arabie, et J. D. Carroll, "Conceptions of overlap in social structure", in L. C. Freeman, D. R. White et A. K. Romney, *Research Methods in Social Network Analysis*. Fairfax, VA, George Mason University Press, 1989.

(7) G. Birkhoff, *Lattice Theory*. Providence, RI, American Mathematical Society, 1966.

(8) M. Barbut et B. Monjardet, *Ordre et Classification Algèbre et Combinatoire*. Paris, Librairie Hachette, 1970.

(9) R. Wille, "Line diagrams of hierarchical concept systems", *International Classification*, n°11, 1984, 77-86. R. Wille, "Finite distributive lattices as concept lattices", *Atti Inc. Logica Mathematica*, n°2, 1985, 635-648. B. Ganter, J. Stahl et R. Wille, "Conceptual measurement and many-valued contexts", in W. Gaul, et M. Schader, *Classification as a Tool of Research*. Amsterdam, North-Holland, 1986. R. Wille, "Subdirect product construction of concept lattices", *Discrete Mathematics*, n°63, 1987, 305-313. V. Duquenne, "Contextual implications between attributes and some representation properties for finite lattices", in B. Ganter, R. Wille et K. E. Wolff, *Beiträge zur Begriffsanalyse*. Mannheim, Wissenschaftsverlag, 1987. P. Luksch, et R. Wille, "Formal concept analysis of paired comparisons", in H. H. Bock, *Classification and Related Methods of Data Analysis*. Amsterdam, North-Holland, 1988. R. Wille, "Geometric representations of concept lattices", in O. Optiz, *Conceptual and Numerical Analysis of Data*, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1989. B. Ganter, et R. Wille, "Conceptual scaling", in F. Roberts, *Applications of Combinatorics and Graph Theory in the Biological and Social Sciences*. New York, Springer Verlag, 1989.

(10) S. MacLane, et G. Birkhoff, *Algebra*. New York, Macmillan, 1967, p:484.

(11) M. Granovetter, "The strength of weak ties", *American Journal of Sociology*, n°78, 1973, 1360-1380.

(12) S. MacLane, et G. Birkhoff, *op cit.*, pp: 491-492.

(13) S. F. Sampson. *A Noviate in a Period of Change: An Experimental and Case Study of Social Relationships*. PhD Dissertation, Cornell University, 1968.

(14) P. Arabie et J. D. Carroll, *op cit.* p:380.

=====

	I1	I3	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8	W9	S1	S2	S4
I1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
I3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
W1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
W2	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
W3	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
W4	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
W5	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0
W6	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
W7	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
W8	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
W9	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
S1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
S2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
S4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0

Tableau 1. Recherche sur les Jeux de Société

	C1	C2	C3	C4	C5
I1	1	0	0	0	0
I3	0	0	0	0	0
W1	1	1	1	0	0
W2	1	1	0	0	0
W3	1	1	1	0	0
W4	1	1	1	0	0
W5	0	0	1	0	0
W6	0	0	0	1	0
W7	0	0	0	1	1
W8	0	0	0	1	1
W9	0	0	0	1	1
S1	0	1	1	0	0
S2	0	0	0	0	0
S4	0	0	0	0	1

Tableau 2. Cliques Formées à l'Occasion des Jeux de Société

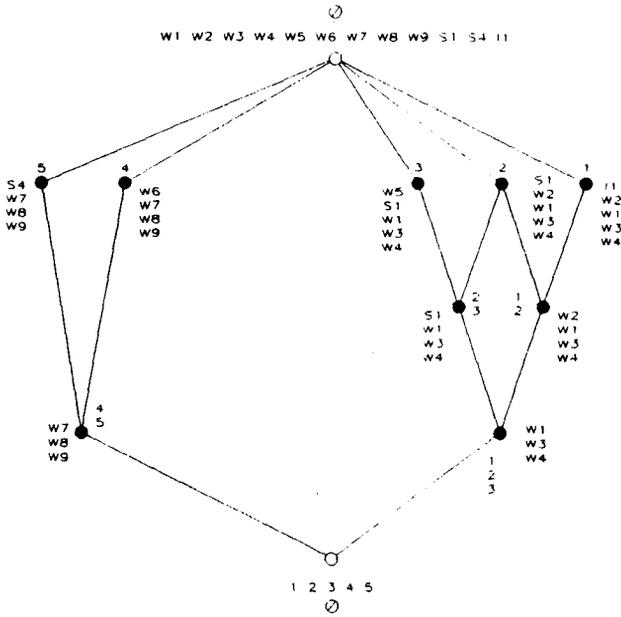


Figure 1: Le Treillis de Galois des Jeux de Société des Cliques de Roethlisberger et Dixon

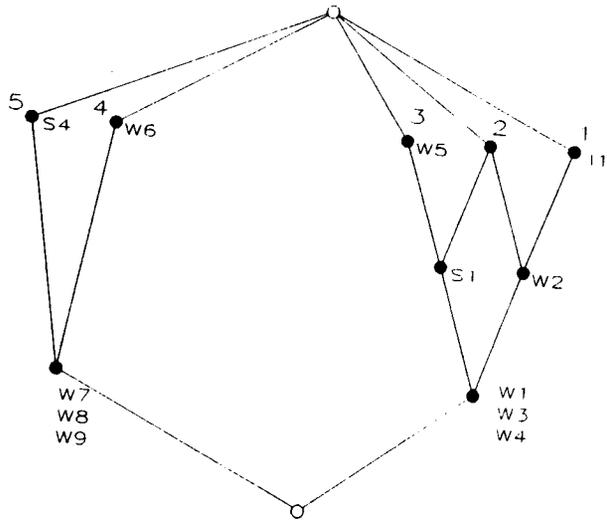


Figure 2: Le Treillis du Figure 1 avec Moins d'Annotations

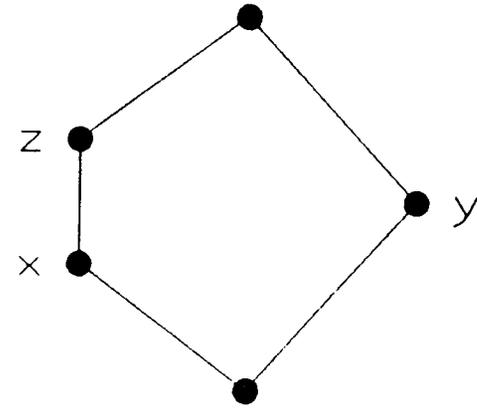


Figure 3. Le Treillis N5

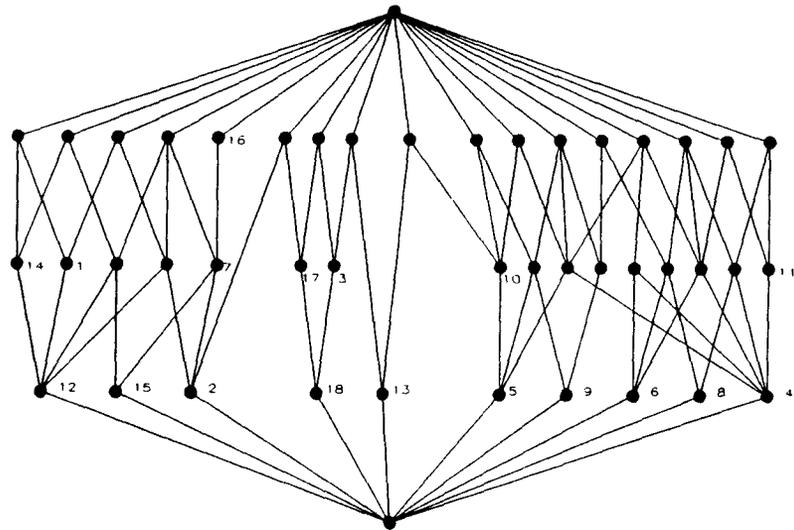


Figure 4: Le Treillis de Galois Base sur la Recherche de Sampson

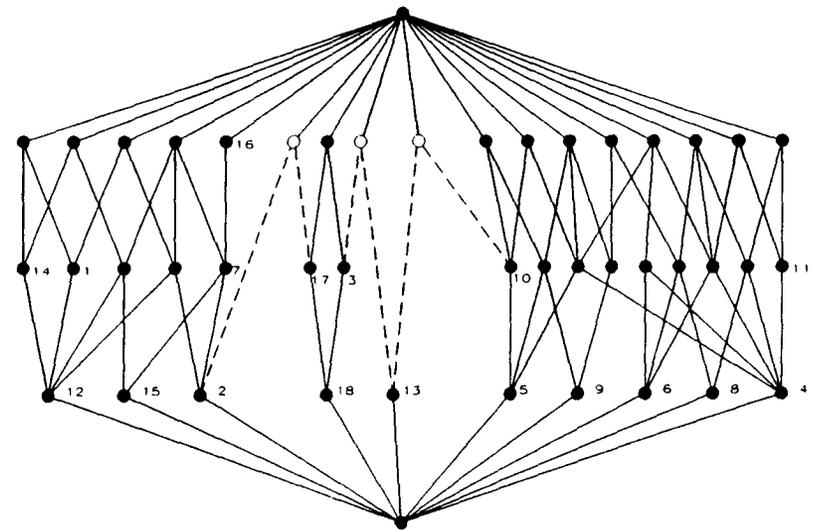


Figure 5: Le Treillis du Figure 4 mais dont les Cliques Intermédiaires Sont Mises en Relief

=====